Fen-Edebiyat Fakültesi	ARA SINAV KAĞIDI	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Kısmi Türevli Denklemler	
İmza:	Sınav Tarihi: 22 Kasım 2024	

Süre 75dk.

Lagrange-Charpit Denklemleri:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{dp}{-\left(F_x + pF_z\right)} = \frac{dq}{-\left(F_y + qF_z\right)}$$

1. (30 puan) $4yzp + q + 2y = 0$ kısmi türevli denkleminin $y^2 + z^2 = 1$, $x + z = 2$ başlangıç eğrisinden geçen çözümünü bulun.

Çözüm:

$$\frac{dx}{4yz} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{-2y}$$

$$-2ydy = dz \implies u_1 = z + y^2 = c_1$$

$$dx + 2zdz = 0 \implies u_2 = x + z^2 = c_2$$

$$u_1 + u_2 = x + z + y^2 + z^2 = 2 + 1 = 3$$

Çözüm:

$$z + y^2 + x + z^2 = 3$$

2. (30 puan) $-ydx + xdy + x^2 f'(z)dz = 0$ Pfaff denkleminin keyfi bir $f(z)$ fonksiyonu için (a) integrallenebilir olduğunu gösterin, (b) ilkel fonksiyonunu elde edin.

Çözüm: (a)

$$\vec{X} = (-y, x, x^2 f'(z))$$

$$\text{curl}(\vec{X}) = (0, -2xf'(z), 2)$$

$$\vec{X} \cdot \text{curl}(\vec{X}) = 0$$

(b) $z = c$, $dz = 0$ alırsak

$$-ydx + xdy = 0 \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \implies u = \frac{y}{x} = \text{sbt}$$

$$u_x = \lambda P \implies \frac{-y}{x^2} = -y\lambda \implies \lambda = \frac{1}{x^2}$$

$$0 = \lambda(-ydx + xdy + x^2 f'(z)) = du + f'(z)dz \implies u + f(z) = \text{sbt}$$

Çözüm:

$$\frac{y}{x} + f(z) = \text{sbt}$$

3. (20 puan) $e^z pq = p + q$ nonlineer denkleminin tam çözümünü belirleyin.

Çözüm:

$$F(z,p,q) = e^z pq - p - q = 0$$

$$F_x = F_y = 0 \implies \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \implies p = aq$$

$$e^z aq^2 - qa(a+1) = 0 \implies q = \frac{(a+1)}{a} e^{-z} \implies p = (a+1)e^{-z}$$

$$dz = pdx + qdy \implies e^z dz = (a+1)dx + \frac{(a+1)}{a} dy$$

$$e^z = (a+1)x + \frac{(a+1)}{a} y + b$$

Çözüm:

$$z = \ln\left((a+1)x + \frac{(a+1)}{a} y + b\right)$$

4. (20 puan)
Birinci mertebeden 3 bağımsız değişkenli lineer kısmi türevli denklemin en genel formunu yazın.

Çözüm:

$$a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y + c(x,y,z)u_z = d(x,y,z)u$$

Birinci mertebeden 3 bağımsız değişkenli kuazi-lineer kısmi türevli denklemin en genel formunu yazın.

Çözüm:

$$a(x,y,z,u)u_x + b(x,y,z,u)u_y + c(x,y,z,u)u_z = d(x,y,z,u)$$

Birinci mertebeden 2 bağımsız değişkenli non-lineer kısmi türevli denklemin en genel formunu yazın.

Çözüm:

$$F(x,y,z,z_x,z_y) = 0$$

$u_1(x,y,z)$ ve $u_2(x,y,z)$ fonksiyonlarının fonksiyonel olarak bağımsız olma koşulunu yazın.

Çözüm:

$$\nabla u_1 \times \nabla u_2 \neq \vec{0}$$

$a(x, y, z)\,dx + b(x, y, z)\,dy + c(x, y, z)\,dz = 0$ denkleminde integral çarpan ve ilkel fonksiyonu tanımlayın.

Çözüm:

$$d\phi = \lambda(P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz)$$

Burada ϕ ilkel fonksiyon, λ integral çarpan olur.